(Romb). ⚠ coquille $MN \notin A_n$

170, 171, (159).

38 : Étude de la forme quadratique $\mathrm{tr}(M^2)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$

Théorème : q est une forme quadratique réelle, $\mathrm{sgn}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.
De plus, $S_n^\perp = A_n$; $q|_{S_n} > 0$ et $q|_{A_n} < 0$.

Preuve : Étape 1 : On pose $M^2 = (p_{ij})_{i,j}$. On a alors

$$p_{ii} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{ki} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \text{ et donc}$$

$$q(M) = \mathrm{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{ki}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ii}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_{ij}x_{ji}.$$ On voit

que q est un pol. homogène de degré 2 en $(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ donc une forme quadratique sur $\mathbb{R}$, de forme polaire $\varphi : (M,N) \mapsto \mathrm{tr}(MN)$.

En effet : $\varphi(M,N) = \frac{1}{2}\left(q(M+N) - q(M) - q(N)\right)$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(M^2) + \mathrm{tr}(N^2) + 2\,\mathrm{tr}(MN) - \mathrm{tr}(M^2) - \mathrm{tr}(N^2)\right)$$
$$= \mathrm{tr}(MN) \text{ car } \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM).$$

Étape 2 : déterminons sa signature :
Pour $1 \leq i < j \leq n$, on a $2x_{ij}x_{ji} = \frac{1}{2}(x_{ij}+x_{ji})^2 - \frac{1}{2}(x_{ij}-x_{ji})^2$

On obtient alors la réduction de Gauss

$$q(M) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_{ij}+x_{ji})^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_{ij}-x_{ji})^2$$

Scanned with TapScanner

$$= \sum_{i=1}^{n} L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i<j\leq n} L_{ij}^2(M) - \frac{1}{2} \sum_{1\leq i<j\leq n} L_{ji}^2(M)$$

où les formes linéaires L_{ij} pour $1\leq i,j\leq n$ sont définies par :

$$\begin{cases} L_{ii}(M) = x_{ii} & (1\leq i\leq n) \\ L_{ij}(M) = x_{ij}+x_{ji} & (1\leq i<j\leq n) \\ L_{ji}(M) = x_{ij}-x_{ji} & (1\leq i<j\leq n) \end{cases}.$$

Par conséquent, le rang de q est

$$q = n + 2\,\mathrm{Card}\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid 1\leq i<j\leq n\}$$

$$= n + 2\binom{n}{2} = n + n(n-1)$$
$$= n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Donc q est non dégén ; $\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$.

On a de plus

$$\mathrm{sgn}(q) = \left(n + \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

<u>Étape 3 :</u> On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (cf. Gourdon).

Avec $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

<u>Calculons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}$:</u>

Soient $(M,N)\in \mathcal{A}_n\times\mathcal{S}_n$. (On veut mq $M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}$, ce que $\forall N\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \varphi(M,N)=0$).

On a

$$^t(MN) = {}^tN\,{}^tM = -{}^tNM = -NM,$$

de plus, $\varphi(M,N) = \mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(^t(MN)) = \mathrm{tr}(-NM)$
$= -\mathrm{tr}(MN)$ d'où

$\mathrm{tr}(MN) = 0$, et alors ceci $\forall M \in A_n(\mathbb{R})$, $\forall N \in S_n(\mathbb{R})$,

Donc $A_n(\mathbb{R}) \subseteq S_n(\mathbb{R})^{\perp}$. Or, q étant non dégén,

on a
$$\dim(S_n^{\perp}) = n - \dim(S_n)$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}.$$
Par dimension,

on a $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^{\perp}$. $\square$

<u>Bonus:</u> $q|_{S_n(\mathbb{R})}$ est def positive.

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On a $^tM = M$, donc $L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} = 0$, pour $i,j \in [\![1,n]\!]$, donc
$$q(M) = \sum_{i=1}^{n} L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij}^2(M) \geq 0.$$

mais $q(M) = 0$ ssi $L_{ii}(M) = x_{ii} = 0$ $\forall i$

et $L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} = 0$ $\forall 1 \leq i < j \leq n$,

$\Leftrightarrow M = 0$. Donc $q|_{S_n(\mathbb{R})} > 0$.

$q|_{A_n(\mathbb{R})} < 0$: par un raisonnement similaire.